Relatività e Meccanica Quantistica: concetti e idee

Relativity and Quantum Mechanics: concepts and ideas

Approfondimenti #2

Carlo Cosmelli

Di cosa parleremo

Qualche richiamo formale:

- Sviluppo in serie
- Trigonometria, definizioni di base
- Velocità media e istantanea
- Derivata di una funzione

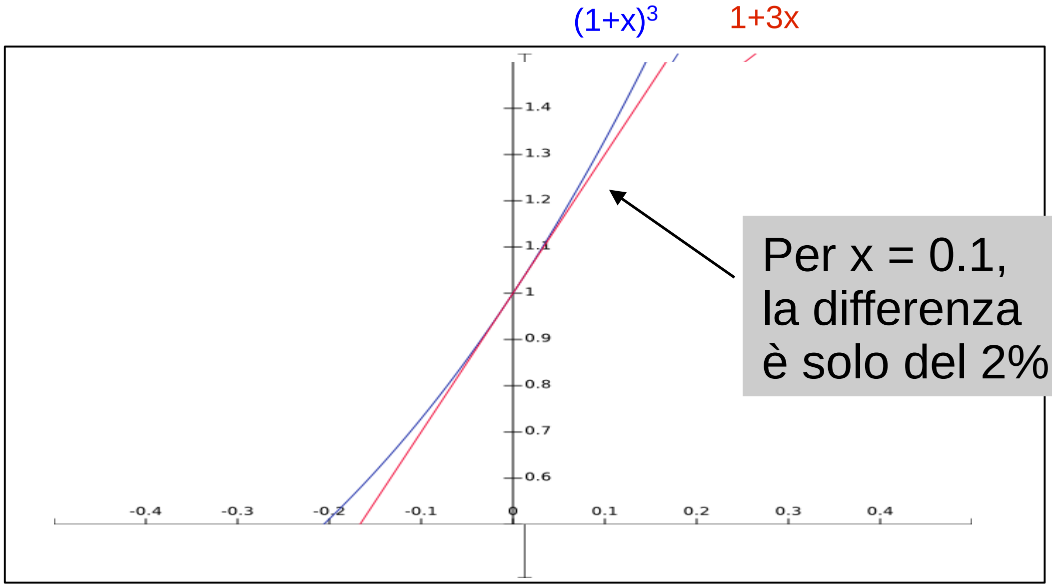
Lo sviluppo in serie

Talvolta può essere utile scrivere un valore approssimato per una funzione f(x).
Se x è molto piccolo, prossimo a zero o in ogni caso molto minore di 1, la funzione **$f(x) = (1 + x)^n$** può essere approssimata con la formula:

$$f(x) = (1+x)^n \approx 1+n\,x$$

ad esempio

$$(1+x)^3 \approx 1+3x$$



Per x = 0.1,
la differenza
è solo del 2%!

Lo sviluppo in serie

Per ottenere una maggiore precisione, occorre tenere conto delle potenze di ordine superiore.
In generale, infatti, una funzione f(x) può essere approssimata da una serie di potenze:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

ad esempio

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

$$\mathbf{e^x\ (x = 0{,}1) = 1{,}10517092}\ \dots$$

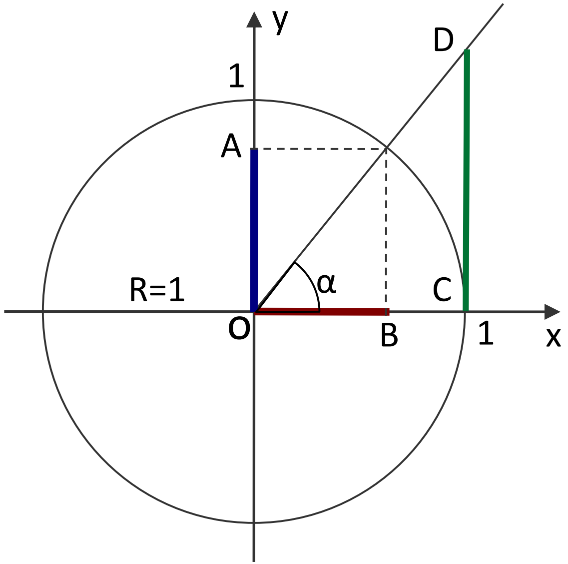
$$1 \quad : \quad \Delta(\text{errore relativo}) = -9{,}5\ 10^{-2}$$

$$1 + x = 1{,}1 : \qquad \Delta = -5{,}0\ 10^{-3}$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} = 1{,}105 : \qquad \Delta = -1{,}5\ 10^{-4}$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = 1{,}105167 : \qquad \Delta = -3{,}8\ 10^{-6}$$

Ricordiamo le definizioni delle principali funzioni trigonometriche basandoci sulla **circonferenza unitaria,** cioè con raggio R=1 ed assi con la stessa unità di misura. Su questa circonferenza tracciamo una semiretta che faccia un angolo α con l'asse orizzontale.



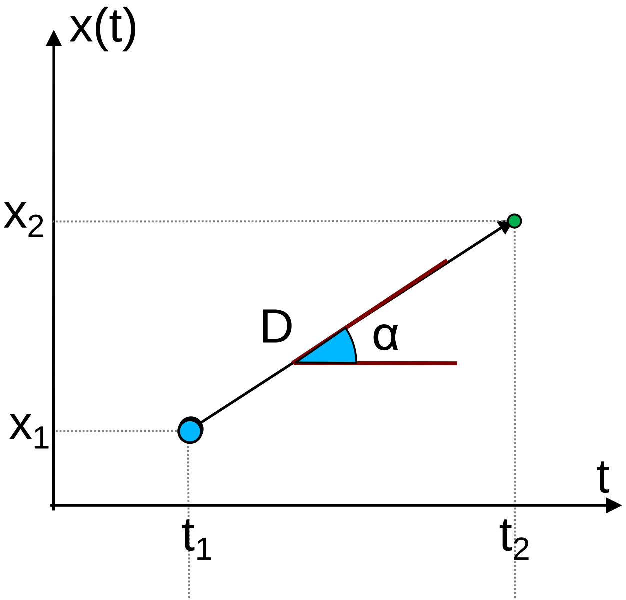
seno di α ⇒ $\sin\alpha = \dfrac{\overline{OA}}{R} = \overline{OA} \leq 1$

coseno di α ⇒ $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OB}}{R} = \overline{OB} \leq 1$

tangente di α ⇒ $\tan\alpha = \dfrac{\overline{CD}}{R} = \overline{CD} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

La velocità media di un «oggetto» in movimento

La velocità media è definita come il rapporto fra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo. Consideriamo un corpo che al tempo t_1 si trovi nella posizione x_1 e all'istante t_2 si trovi nella posizione x_2.
Il suo moto può essere rappresentato nel piano (x,t):



La velocità media <**v**> è data dal rapporto fra lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo:

$$< \mathbf{v} > = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} \overset{!}{=} \frac{D \cdot \text{sen}\,\alpha}{D \cdot \cos\alpha} = \tan\alpha$$

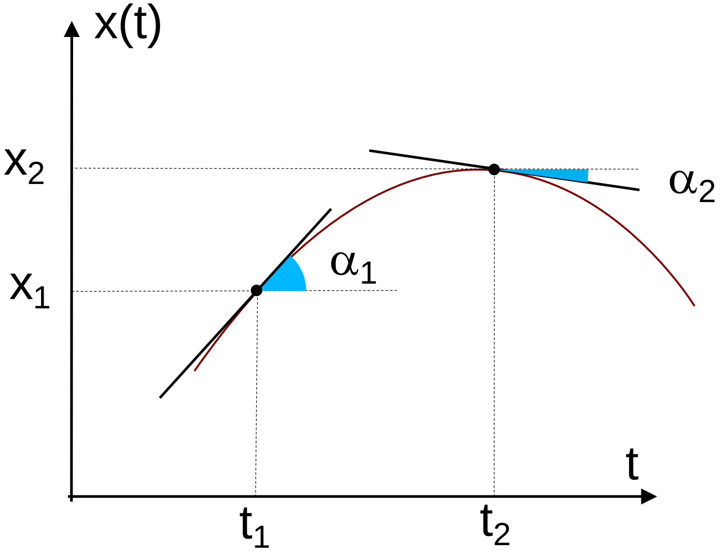
Questo rapporto, «geometricamente», è la pendenza del tratto percorso, uguale alla tangente dell'angolo α: attenzione alle unità di misura!

$$< \mathbf{v} > = \tan\alpha \; \frac{[L]}{[t]}$$

, le unità di misura sono quelle di $\left[\frac{x}{t}\right]$

La velocità istantanea – moto in una dimensione

Se la velocità non è costante, quindi se la legge x(t) non è una retta, per calcolare la velocità istantanea, che può essere differente istante per istante, bisogna calcolare la pendenza della retta tangente alla curva in ciascun istante di tempo.



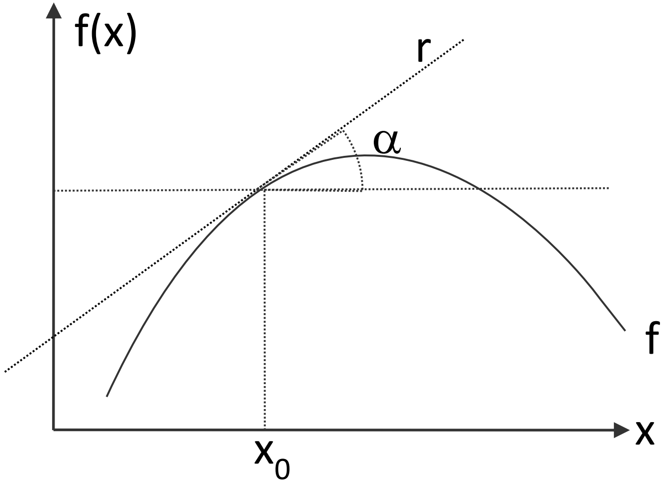
Quindi:

$v(t_1)= \tan \alpha_1$

$v(t_2)= \tan \alpha_2$

La derivata di una funzione

La **derivata** $df(x)/dx = f'(x_0)$ di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 è la pendenza della curva che rappresenta la funzione in quel punto, pari al **coefficiente angolare** della retta **r** tangente alla curva nel punto x.



La derivata è quindi uguale alla tangente dell'angolo α tra la retta tangente r e l'asse x.
Il **segno** della derivata ci dice se la funzione in quel punto cresce ($f' > 0$) o decresce ($f' < 0$).

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0} = f'(x)_{x_0} = \tan\alpha$$

Se sulle ascisse rappresentiamo il tempo **t** e sulle ordinate uno spostamento **s(t)**, allora la derivata all'istante $\mathbf{t_0}$ rappresenta il modulo della **velocità istantanea** $\mathbf{v(t_0)}$**.**